1 - Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Les lois de la dynamique :

Au XVIIe siècle, Galilée énonce un principe simple :

- Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement.

Moins d'un siècle après et en ayant bien pris soin de définir ce qu'est une masse, un poids et une force, Isaac Newton formule trois lois fondamentales :

1ère loi : Dans un repère galiléen, tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et n'étant soumis à aucune force extérieure, conserve son mouvement.

2ème loi : Force = masse * accélération

3ème loi : Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.

Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) est la traduction avec les outils mathématiques actuels des lois de Newton.

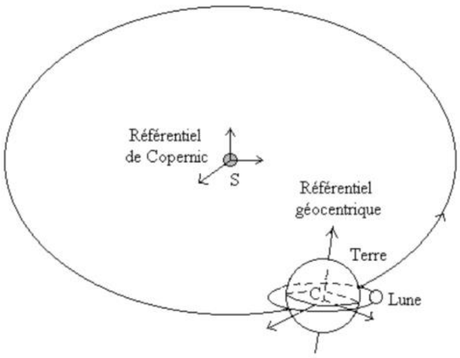
2 – Repères et référentiels

Le PFD est valable uniquement s'il est exprimé dans un repère Galiléen.
Exemples de repères galiléens :

- Repère de Copernic : Origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaires «fixes». Tout repère en translation par rapport au repère de Copernic peut être considéré comme Galiléen.

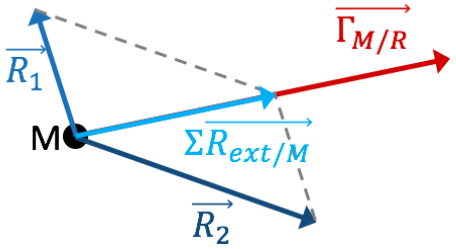
- Repère lié au centre d'inertie de la terre : Origine au centre de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent).

- Le repère terrestre : Origine locale du repère de travail. Utilisation : convient en général aux phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.



3 – PFD sur un solide « ponctuel »

Si le point M de masse m est soumis à des actions extérieures alors son accélération est portée par le même axe que la somme des résultantes.



Somme des forces extérieures = masse du solide * accélération du point M.

$$\Sigma\overrightarrow{R_{ext/M}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$$

4 – PFD sur un solide « quelconque »

Soit un solide (S) quelconque de masse m.
Contrairement au solide précédent, celui-ci peut subir des efforts en différents points.
Ceux-ci peuvent le faire tourner, il y aura donc présence de moments.
En appliquant la démonstration précédente à ce solide, il suffirait de considérer celui-ci comme la somme de points Mi, de masses mi.

Si le solide (S) est soumis à des actions mécaniques extérieures :

$$\{\mathcal{T}_{ext\to S}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \Sigma\overrightarrow{R_{ext/S}} \\ \Sigma\overrightarrow{M_{A,ext/S}} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}} = {}_A\begin{Bmatrix} \Sigma m_i\,\overrightarrow{\Gamma_{M\iota/R}} \\ \Sigma\,\overrightarrow{AM_\iota} \wedge m_i\overrightarrow{\Gamma_{M\iota/R}} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \begin{matrix} \textit{Résultante dynamique} \\ \textit{Moment dynamique} \end{matrix}$$

On peut aussi l'écrire en utilisant les torseurs :

$$\{\mathcal{T}\ \text{mécanique}\} = \{\mathcal{T}\ \text{dynamique}\}$$

5 – Mouvement de translation

Si le solide est en translation, on peut simplifier la résultante dynamique de la manière suivante :

$$\Sigma\, m_i\,\overrightarrow{\Gamma_{M\iota/R}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$$

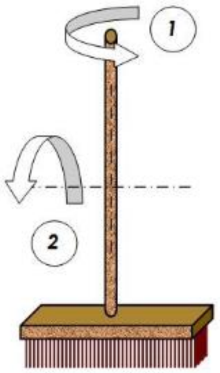
avec : - G le centre de gravité du solide
- m la masse du solide

Donc si un solide (S) est en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen R, alors :

$$\{\mathcal{T}(ext\to s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R\,(ext\to s)} = m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/\Re}} \\ \overrightarrow{M_G(ext\to s)} = \vec{0} \end{cases}$$

6 – Mouvement circulaire, moment d'inertie

Approche empirique :

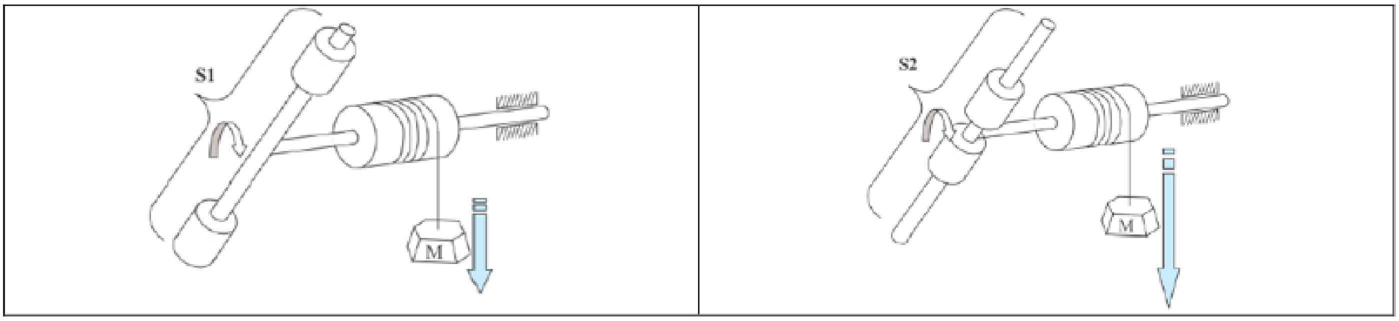


Lorsque l'on prend un balai en main au milieu du manche et qu'on le fait tourner comme sur la figure ci-contre, il est plus aisé de le faire tourner autour de l'axe du manche (1), qu'autour de l'axe transversal indiqué (2).

Cela est dû au fait que dans le deuxième cas, la matière constituant le balai se trouve plus éloignée de l'axe de rotation. Comme pour un solide en rotation, la vitesse linéaire d'un point croît en proportion avec cet éloignement, il est nécessaire de communiquer une plus grande énergie cinétique aux points éloignés.

D'où la plus grande résistance du balai à tourner autour d'un axe transversal qu'autour de l'axe du manche.

Les deux objets ci-dessous sont identiques, hormis la position des masselottes qui est plus éloignée du centre de rotation pour le solide S1.



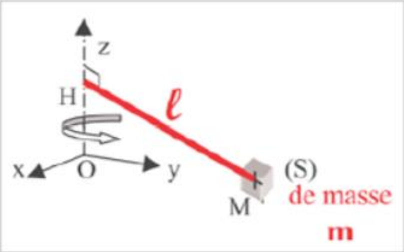
On lâche les masses M simultanément.

Constatation :

La masse liée au solide S2 descend plus vite. Le solide S2 est plus facile à mettre en mouvement de rotation que S1. Les deux solides ont pourtant la même masse mais répartie différemment par rapport à l'axe de rotation. Ils n'ont pas le même moment d'inertie.

Calcul du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide S modélisable par un point M de masse m.

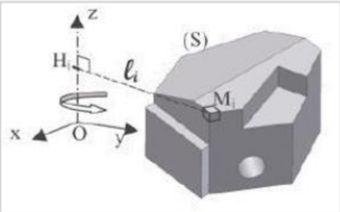


Le moment d'inertie de S par rapport à un axe Oz est donné par la relation :

$$\boxed{J_{OZ} = m \cdot \ell^2 \quad \text{En} \quad \mathbf{kg.m^2}}$$

<u>*Or :*</u>

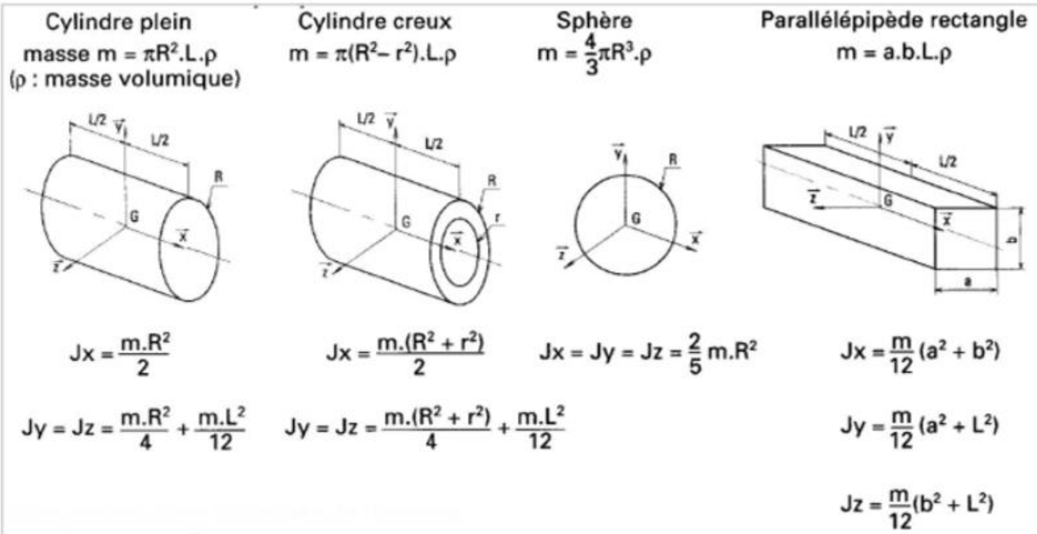
- Si le solide est 2 fois plus lourd, il sera 2 fois plus difficile à entrainer en rotation.
- Si le solide est 2 fois plus éloigné de l'axe, il sera 4 fois plus difficile à entrainer en rotation.



Tout solide peut être considéré comme une somme de points Mi de masse dmi donc le moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe Oz s'écrit :

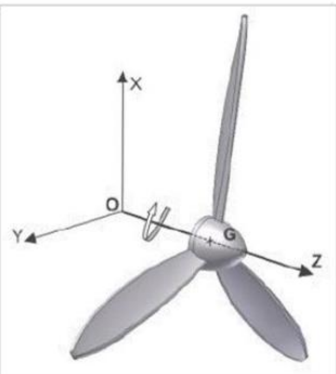
$$J_{oz} = \iiint_s \ell^2 \, dm$$

<u>*Exemples de moments d'inertie de volume « élémentaires » :*</u>



7 – Mouvement de rotation autour d'un axe

Nous considérerons, par hypothèse, que le solide S possède un axe de symétrie au niveau de la géométrie des masses. Le centre de gravité G est donc situé sur l'axe de rotation $(O, \vec{z})$.



Le torseur lorsqu'un solide S n'est soumis qu'à un mouvement de rotation causé par un moment angulaire s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R\,(ext \rightarrow s)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{oz}(ext \rightarrow s)} = J_{oz} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z} \quad \text{ou} \quad J_{oz} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

8 – Ecriture du torseur dynamique

Ecriture générale du principe fondamental de la dynamique :

➔ *Nul si mouvement de rotation.*

➔ *Nul si mouvement de translation.*

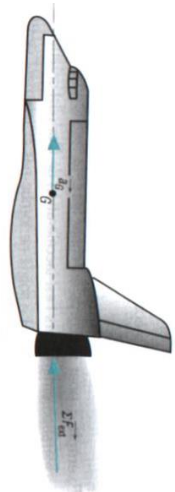
$$\{\mathcal{T}(ext \rightarrow s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R\,(ext \rightarrow s)} = m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/R}} \\ \overrightarrow{M_{oz}(ext \rightarrow s)} = J_{oz}\,.\,\ddot{\theta}\,.\,\vec{z} \quad \text{ou} \quad J_{oz}\,.\,\dot{\omega}\,.\,\vec{z} \end{cases}$$

Remarque : Cette écriture est valable si le mouvement de rotation est un simple mouvement autour d'un axe fixe !

9 – A

Etude n°1 :

Soit une navette spatiale en phase de décollage. La masse de la navette spatiale est de 100 tonnes, la résistance de l'air est négligée. La poussée de chaque réacteur est de 2300kN, la navette en possède 3.



1/ Déterminer l'accélération que subit les astronautes.

Les astronautes subissent donc une accélération de .... fois celle de la pesanteur.

2/ Sachant que l'accélération est considérée constante sur toute la phase de décollage, déterminer la vitesse de la navette au bout d'une minute et la distance parcourue depuis le sol.

Etude n°2 :

Un parachutiste de 60 Kg et son parachute de 7 Kg tombent à une vitesse constante de module 6 m/s. Déterminez le module :

1. De la force exercée par le parachute sur le parachutiste
2. De la force exercée par l'air sur le parachute (on néglige la force exercée par l'air sur le parachutiste).