CINEMATIQUE

La mécanique est le domaine de tout ce qui produit ou transmet un mouvement, une force, une déformation : machines électriques, pneumatique, ou thermiques, véhicules, organes (engrenages, poulies, courroies, vilebrequins, arbres de transmission, pistons, etc.).

La cinématique est une branche de la mécanique, et étudie les mouvements des corps.

La cinématique se propose d'étudier en particulier le mouvement des solides et cela indépendamment des causes qui le provoquent.

Les 4 grandeurs intervenant en cinématique sont :

- Le temps ou la durée ;
- La position d'un point dans l'espace : elle correspond à la localisation de ce point dans l'espace (3D) à un instant *t* donné ;
- La vitesse d'un point : elle représente la variation de la position par unité de temps ;
- L'accélération d'un point : elle représente la variation de la vitesse par unité de temps.

I.1 Révision : Schéma cinématique

I.1.1 Objectif du schéma cinématique

L'objectif du schéma cinématique est de décrire par un outil graphique normalisé les mouvements possibles entre solides pris 2 à 2.

Le schéma cinématique permet donc de donner une représentation simplifiée d'un mécanisme, à l'aide de symboles, afin de faciliter :

- l'analyse de son fonctionnement et de son architecture ;
- l'étude des différents mouvements et des actions mécaniques.

I.1.2 Démarche d'élaboration

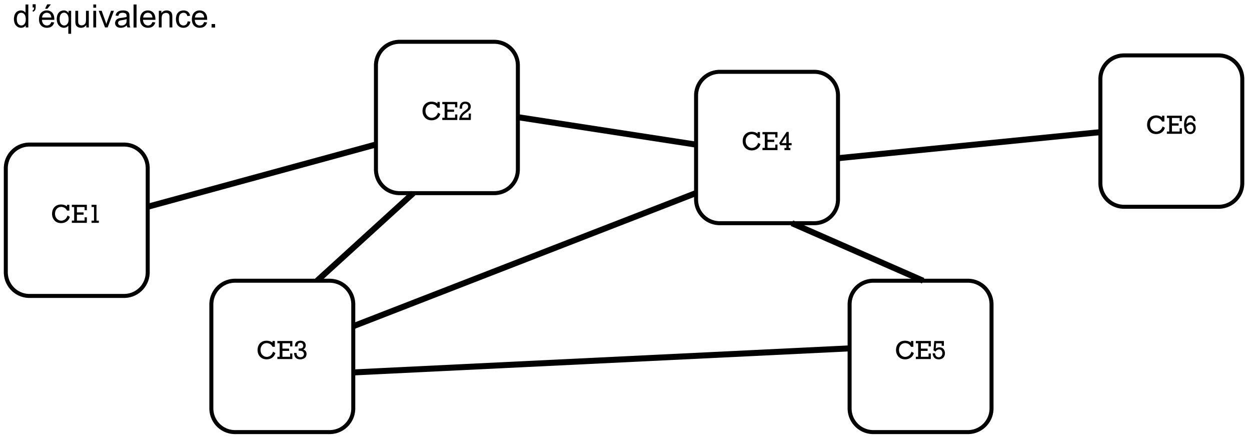
Les principales étapes de la réalisation d'un schéma cinématique sont décrites ci-dessous :

➢ Définir et lister les classes d'équivalence :

Une **classe d'équivalence** est un groupe de pièces (solides indéformables) fixes les unes par rapport aux autres (liaison complète ou encastrement).

➢ Réaliser le graphe des liaisons :

Cet outil nous permet d'inventorier toutes les liaisons entre les différentes classes d'équivalence. Chaque liaison est représentée par un segment reliant 2 classes d'équivalence.



- Analyser chaque liaison :

Cette étape permet de reporter sur le graphe des liaisons ou dans un tableau les caractéristiques de chacune de ces liaisons.

Entre	Et	Point	Surface(s) fonctionnelle(s) ou ddl	Nb de ddl	Nom de la liaison
CE1	CE2	A			
CE2	CE3	B			
CE3	CE1	C			
...	…	…	…	…	

Remarques :
- Il est nécessaire d'avoir associé un repère fixe au système ;
- Lorsque l'on étudie une liaison, on fait abstraction des autres classes d'équivalence ;
- L'analyse des liaisons est faite à partir des surfaces fonctionnelles en contact. Bien souvent, elle est réalisée à partir des mouvements élémentaires.

- Etablir le schéma cinématique :

À chaque liaison est associé un symbole normalisé (voir chapitre VI.2.4), en fonction du plan de représentation du schéma, il suffit de placer chaque symbole au point de liaison en respectant l'orientation et le contenant/contenu (c'est à dire la pièce située à l'intérieur).

Il suffit alors de relier chaque classe d'équivalence par des segments, en essayant de respecter la forme globale des groupes de pièces.

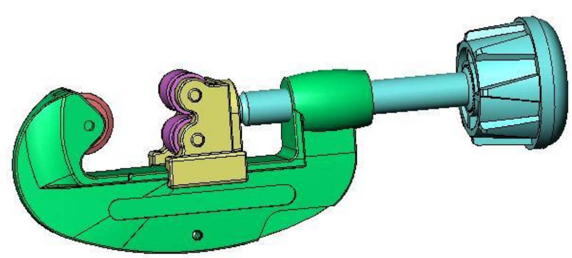
Note : L'idéal est de réaliser le schéma cinématique en couleur (1 couleur = 1 classe d'équivalence).

- Habiller le schéma cinématique :

Pour terminer, on peut placer sur le schéma cinématique des informations complémentaires pour en faciliter la lecture :
- repères des pièces,
- mouvements,
- points particuliers,
- entrée, sortie,
- commentaires,
- etc.

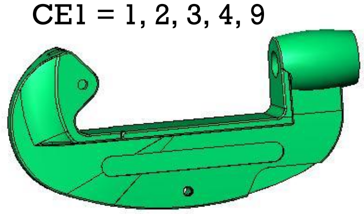
I.1.3 Mise en œuvre de la démarche sur un exemple

Les principales étapes de la réalisation d'un schéma cinématique sont décrites ci-dessous avec comme exemple d'illustration, le cas du coupe tube.

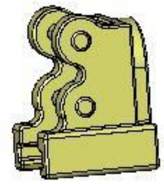


- <u>Définir des classes d'équivalence</u> :

CE1 = 1, 2, 3, 4, 9

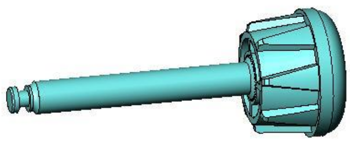


CE2 = 6, 7



CE3 = 5

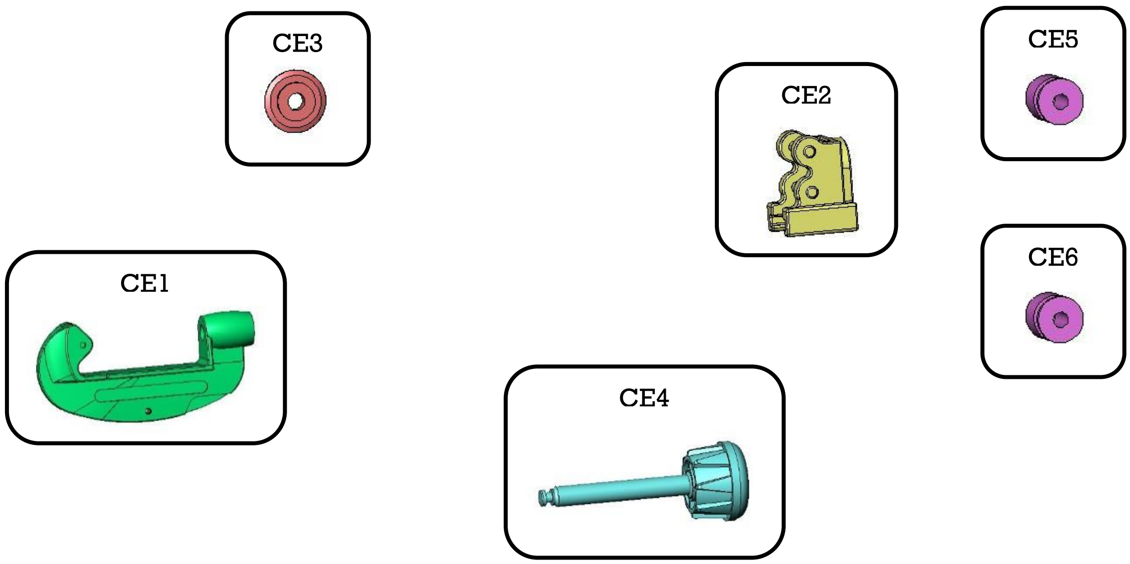
CE4 = 10, 11, 12



CE5 = 8b

CE6 = 8a

- <u>Réaliser le graphe des liaisons</u> :



- <u>Analyser chaque liaison</u> :

Entre	Et	Point	Surface(s) fonctionnelle(s) ou ddl	Nb de ddl	Nom de la liaison
CE1	CE2				
CE1	CE3				
CE2	CE4				
CE1	CE4				
CE2	CE5				
CE2	CE6				

- Etablir le schéma cinématique :

I.1.4 Cas particulier : étude plane

Lorsque le problème présente une symétrie géométrique et d'effort par rapport à un plan, il est possible d'étudier ce problème dans le plan de symétrie afin de simplifier les calculs.

Le coupe tube ci-dessus peut faire l'objet d'une modélisation plane.

II DEFINITION D'UN SOLIDE INDEFORMABLE

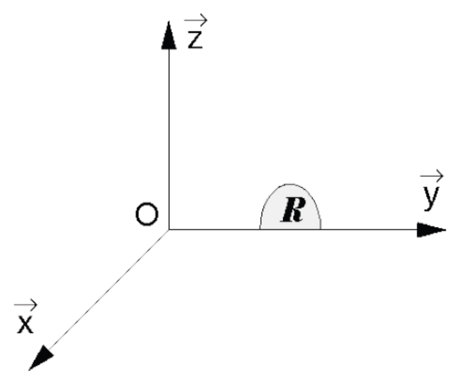
II.1 Référentiel : espace, temps – Repère attaché à un référentiel

Référentiel

Le référentiel est un système de repérage permettant de situer un événement dans l'espace et dans le temps.

Le référentiel est constitué d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Repère d'espace



Les solides étudiés évoluent dans un espace physique à 3 dimensions qui peut être modélisé par un espace caractérisé par un repère orthonormé direct $\Re(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Un repère $\Re$ est caractérisé par une **origine O** et par une **base.** La base est **orthonormée directe :** le repère est alors appelé **repère cartésien** et est noté $\Re(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Orthonormée signifie :

- La base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. possède des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui sont orthogonaux entre eux (perpendiculaires) ;
- Les axes du repère sont des vecteurs dont la norme (longueur) est unitaire ;

Directe signifie que les angles orientés $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{y}, \vec{z})$, et $(\vec{z}, \vec{x})$ valent chacun +90° (+π/2 rad) dans le sens trigonométrique (inverse du sens des aiguilles d'une montre).

II.2 Équivalence entre référentiel et solide indéformable

Solide indéformable

On appelle solide indéformable S, tout ensemble de points matériels dont la distance est invariable dans le temps, ce qui se traduit par :

$$\forall A \text{ et } \forall B \in S \Leftrightarrow \text{distance entre A et B} = \text{constante}$$

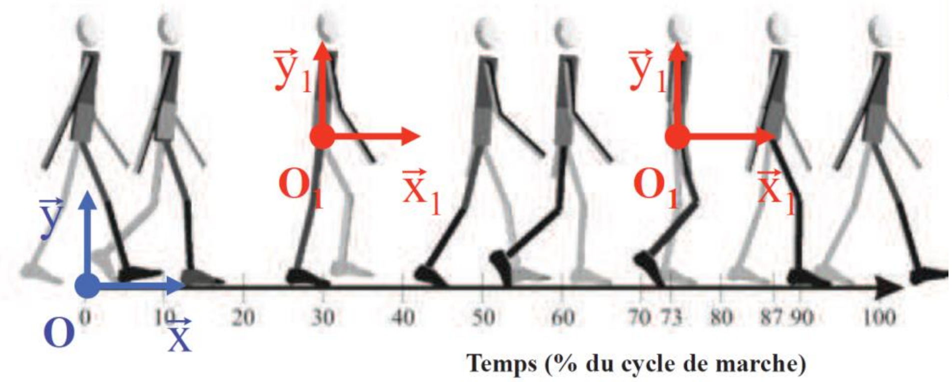
Équivalence entre référentiel et solide indéformable

Un repère d'espace étant défini par une origine et trois vecteurs unitaires orthonormés, les extrémités de ces vecteurs sont à des distances fixes de l'origine, tout en étant fixes entre eux. Ceci étant vrai à chaque instant, un référentiel est donc équivalent à un solide.
Étudier le mouvement d'un solide par rapport à un autre revient donc à étudier le mouvement des repères liés à ces solides.

III NOTION DE MOUVEMENT RELATIF

La notion de mouvement est relative. La description d'un mouvement d'un solide se fait par rapport à un référentiel (ou solide indéformable), choisi comme référence.

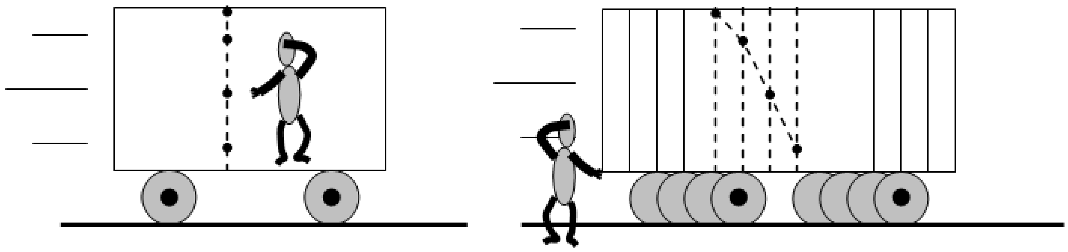
<u>Cas où le solide de référence est immobile :</u>



Considérons le repère orthonormé $\Re_0\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe lié au solide de référence (sol).
Considérons le repère orthonormé $\Re_1\ (O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ mobile lié au buste.
Le point O_1 appartenant au buste est en mouvement par rapport au repère $\Re_0$ mais est immobile par rapport au repère $\Re_1$ (lié au buste).

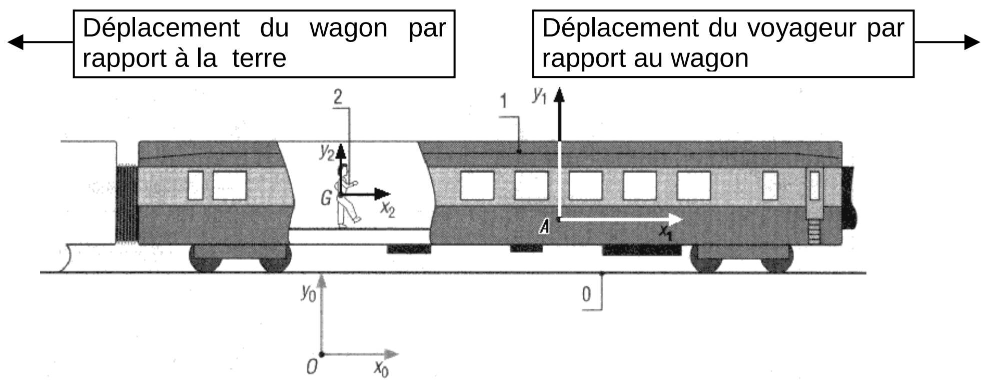
Remarque : ici, on a considéré que la Terre (sol) était fixe (référentiel terrestre), mais si on se place sur la Lune, la Terre a un mouvement, donc le sol n'est pas immobile !!!!!

Cas où le solide de référence est mobile :



Ainsi dans un train qui se déplace en ligne droite à vitesse constante, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne. La personne qui est sur le quai et qui observe la même scène lorsque le train passe devant elle conclut que le mouvement n'est pas rectiligne et pourtant il s'agit bien de la même bille.

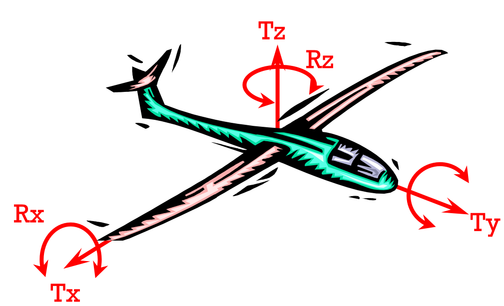
Cas où le solide de référence est mobile :



Considérons le repère orthonormé $\Re_0$ $(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ fixe lié au solide de référence 0 (sol=Terre).
Considérons le repère orthonormé $\Re_1$ $(O_1,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ mobile lié au solide 1 (wagon).
Considérons le repère orthonormé $\Re_2$ $(O_2,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ mobile lié au solide 2 (corps humain).
Le point G appartenant au corps humain est en mouvement par rapport au repère $\Re_1$ si la personne marche dans le wagon, et est aussi en mouvement par rapport au repère $\Re_0$ (si le wagon se déplace), mais immobile par rapport au repère $\Re_2$.

III.1 Les mouvements

La position d'un solide dans l'espace dépend de 6 paramètres indépendants qui caractérisent les 6 degrés de liberté (ddl) du solide (3 translations + 3 rotations) par rapport à un référentiel : T_X, T_Y, T_Z, R_x, R_y, R_z.



On distingue donc 2 types de mouvement :
- Le mouvement de translation ;
- Le mouvement de rotation.

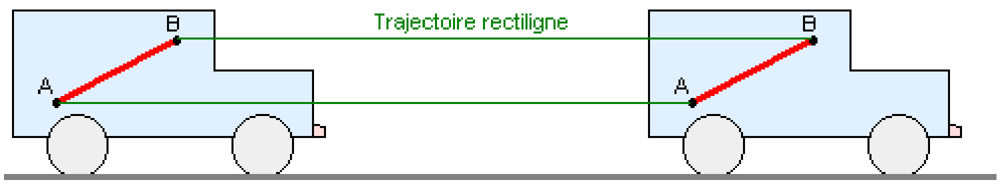
Tous les mouvements peuvent s'envisager comme une composition de mouvement(s) de translation et de mouvement(s) de rotation.

III.1.1 Les mouvements de translation

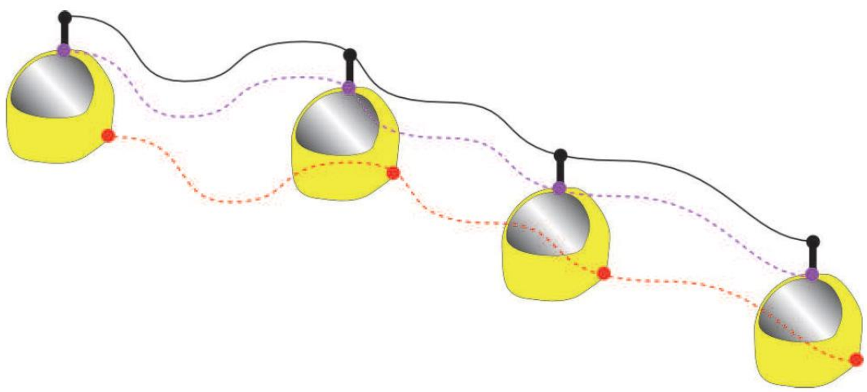
Tous les points d'un objet en mouvement de translation se déplacent entre t_1 et t_2 en parcourant la même distance dans la même direction.

On distingue :

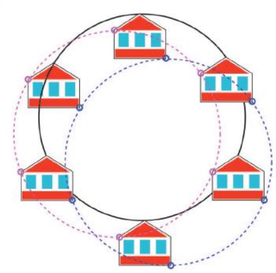
- Mouvement de translation rectiligne



- Mouvement de translation curviligne



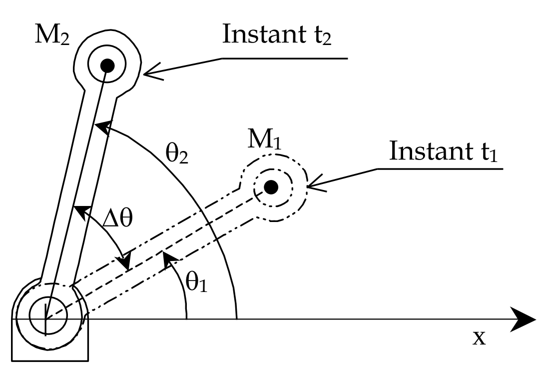
- Mouvement de translation circulaire :



III.1.2 Le mouvement de rotation

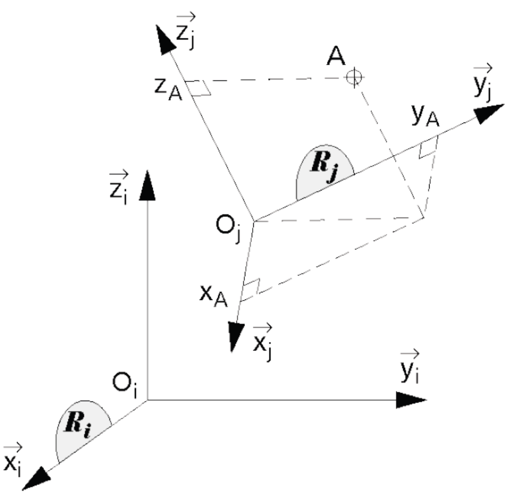
Si 2 points d'un même solide décrivent des cercles concentriques, alors le mouvement est de rotation.
L'axe de rotation est une ligne imaginaire et infinie, toujours perpendiculaire au plan dans lequel s'effectue le mouvement de rotation.

La distance d'un point par rapport à l'axe de rotation est toujours constante.



III.2 Changement de repère

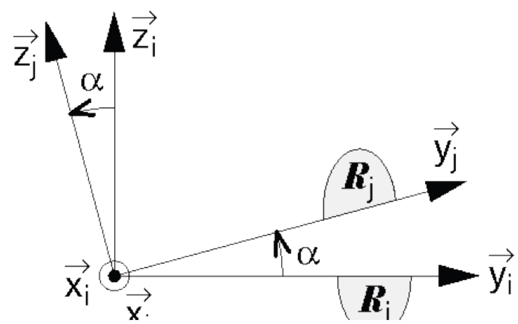
Le positionnement d'un solide S2 par rapport à un solide S1 est défini lorsque les 6 paramètres indépendants T_X, T_Y, T_Z, R_x, R_y, R_z appelés paramètres de position sont déterminés.



De façon générale, soient deux référentiels $\Re_i$ $(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ et $\Re_j$ $(O_j, \vec{x_j}, \vec{y_j}, \vec{z_j})$, l'un lié au solide S_i, l'autre lié au solide S_j.
Soit un point A lié au solide S_j. D'après l'équivalence référentiel-solide, étudier la position du solide S_j par rapport au référentiel $\Re_i$ revient à étudier la position du référentiel $\Re_j$ par rapport au référentiel $\Re_i$.
La position du point A, fixe dans le repère $\Re_j$, peut être exprimée :

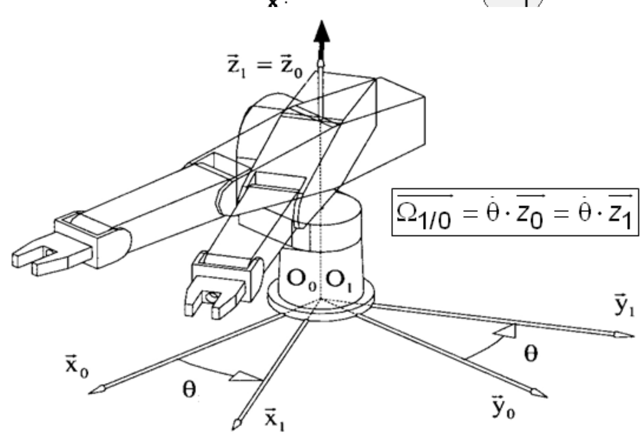
- soit par le vecteur $\overrightarrow{O_jA} = x_A\vec{x_j} + y_A\vec{y_j} + z_A\vec{z_j}$ défini dans le repère $\Re_j$;
- soit par le vecteur $\overrightarrow{O_iA} = x'_A\vec{x_i} + y'_A\vec{y_i} + z'_A\vec{z_i}$ défini dans le repère $\Re_i$.

Changement de repère d'un vecteur dans le cas d'une rotation autour d'un axe



Considérons que le repère $\Re_j$ $(\vec{x_j}, \vec{y_j}, \vec{z_j})$, a pivoté d'un angle α autour de l'axe $\vec{x}$ par rapport au repère $\Re_i(\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$. Dans ces conditions, les vecteurs unitaires de $\Re_j$ peuvent s'exprimer dans le repère $\Re_i$ de la façon suivante :

Vecteur taux de rotation :



Le vecteur taux de rotation appelé aussi vecteur vitesse de rotation noté $\overrightarrow{\Omega_{\Re_1/\Re_2}}$ est défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_{\Re_1/\Re_2}} = \Omega_x\vec{x} + \Omega_y\vec{y} + \Omega_z\vec{z} = \begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix}_{\Re_0}$$

Dans le cas de la figure ci-dessus, le vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\Re_1/\Re_2}}$ s'exprime par :

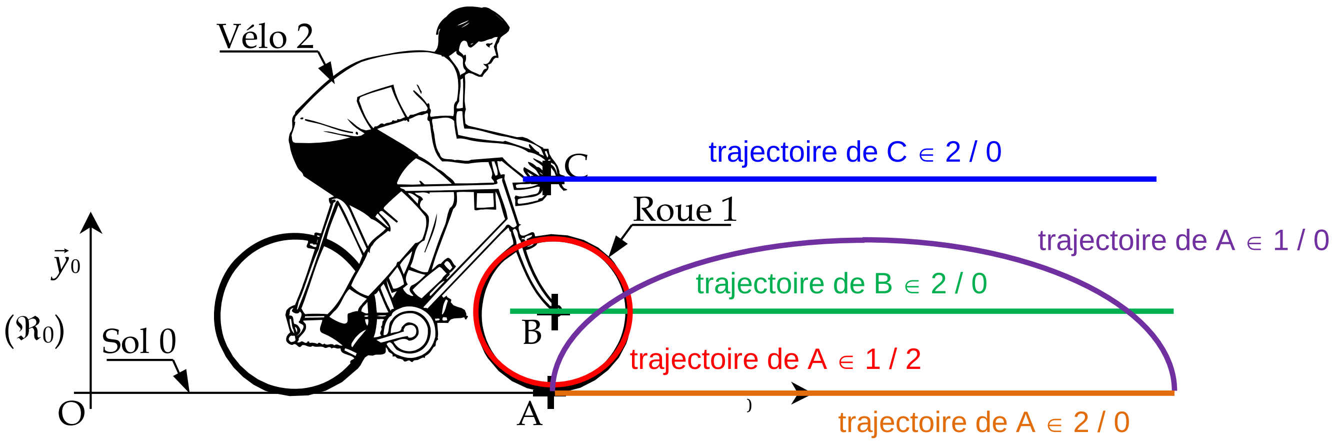
$$\overrightarrow{\Omega_{\Re_1/\Re_2}} = \Big|_{\Re_0}$$

III.3 Trajectoire

III.3.1 Définition

On appelle trajectoire du point M appartenant au solide S par rapport au repère $\mathfrak{R}$, l'ensemble des positions successives au cours du temps. C'est une courbe continue liée au repère $\mathfrak{R}$.

Montrons que cette notion de trajectoire dépend du repère (ou solide) choisi.
Soit (1) la roue avant du vélo, (0) le sol, (2) le cadre du vélo et le point A ∊ (1).



Notation : $\mathcal{T}$(A∊1/2) signifie Trajectoire du point A appartenant au solide 1 dans son mouvement par rapport à 2.

Généralement, on associe un repère à chaque solide, donc parfois, on utilise les notations T(A∊1/$\mathfrak{R}_2$),T(A∊$\mathfrak{R}_1$/$\mathfrak{R}_2$) ou T(A 1/2).

Les trajectoires décrites par les points sont généralement :

- Des droites (ou segments de droite) dont le support est à préciser ;
- Des cercles (ou arcs de cercle) dont le centre et le rayon sont à préciser ;
- Des cycloïdes ;
- …

Remarque : $\mathcal{T}$(A 1/2) est la même trajectoire que $\mathcal{T}$(A 2/1).

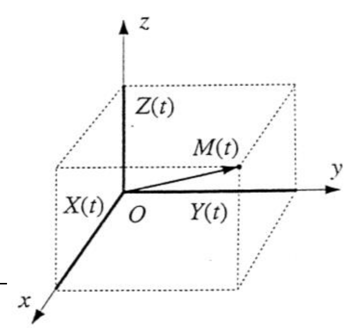
III.4 Vecteur position d'un point géométrique

III.4.1 Définition

Soit $\mathfrak{R}$ un repère orthonormé direct d'origine O, et M un point en mouvement par rapport à $\mathfrak{R}$, le vecteur position du point M à l'instant t est le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$.

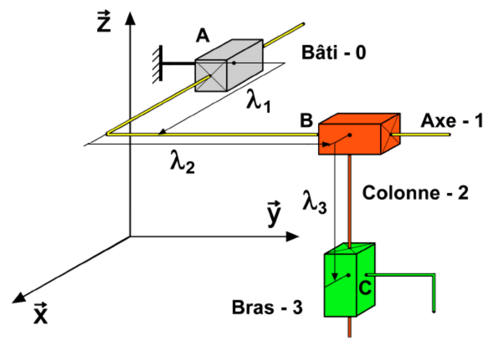
Le point *M* (ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$) peut être défini par différents types de coordonnées. Nous n'utiliserons que les coordonnées cartésiennes dans ce cours.

Dans le repère $\mathfrak{R}$(O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$), le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ peut s'exprimer en fonction de ses projections (composantes) sur les trois axes.



*x(t), y(t), z(t) sont appelées **les coordonnées cartésiennes du point M(t)**.*

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{x}_0 + y(t).\vec{y}_0 + z(t).\vec{z}_0 \qquad \overrightarrow{OM}(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$



III.4.2 Composition du vecteur position

La composition du vecteur position permet d'exprimer un vecteur en passant par des points intermédiaires. Il s'agit simplement de la relation de Chasles vue en mathématiques.

Dans l'exemple ci-contre, le vecteur position $\overrightarrow{AC}$ s'exprime par composition par :

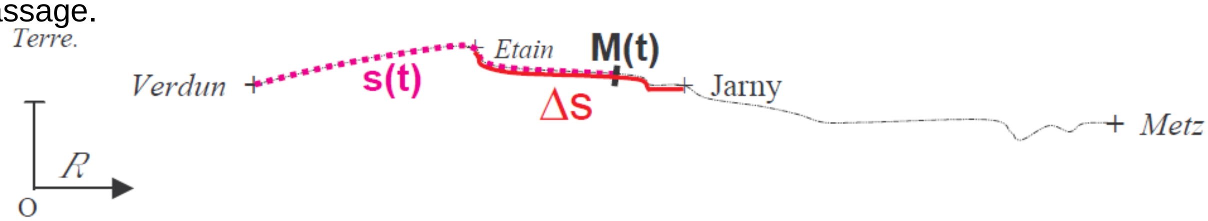
On a donc :

IV VITESSE D'UN POINT D'UN SOLIDE

IV.1 Définitions

IV.1.1 Vitesse moyenne algébrique

Soit un solide S en mouvement dans le repère $\Re$ et un point M appartenant au solide S dont on connaît la trajectoire $T_{M\in S/R}$. Supposons définie une chronologie et établissons une correspondance entre les positions successives de M et les instants de son passage.



On appelle vitesse moyenne algébrique entre les instants t_1 et t_2, le rapport de la variation d'abscisse curviligne (distance parcourue) par la variation correspondante du temps.

$$V_{moy} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps}}$$

<u>Unité de vitesse</u> : **mètre par seconde** (m/s)

IV.2 Vecteur vitesse

Le terme $V_{M\in S/R}$ (t) représente une valeur algébrique (vitesse d'une moto lue sur le compteur). En mécanique, la représentation de la vitesse d'un point par un vecteur permet de préciser en plus, la direction et le sens de cette vitesse.

On calcule la vitesse d'un point en dérivant sa position par rapport au temps :

$$\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Remarque :

Le vecteur vitesse du point $M \in S$ à l'instant *t*, par rapport au repère $\Re$ est tel que :

- son origine est confondue avec la position du point M à l'instant *t* ;
- son support est la tangente en M à la trajectoire $T_{M\in S/R}$;
- son sens est celui du mouvement ;
- sa norme est $\left\|\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right\|$

Remarque : la norme d'un vecteur $\vec{U} = U_x\vec{x} + U_y\vec{y} + U_z\vec{z}$, *notée* $\left\|\vec{U}\right\|$ *s'exprime par* $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{U_x^{\,2} + U_y^{\,2} + U_z^{\,2}}$ *et représente la longueur (intensité) du vecteur.*

Remarque : attention, le vecteur $\vec{U}$ *doit être exprimé dans une et même base.*

IV.3 Composition des vecteurs

IV.3.1 Composition des vecteurs taux de rotation

Lorsqu'un ensemble de solides est en mouvement l'un par rapport à l'autre, la composition des vecteurs taux de rotation s'écrit :

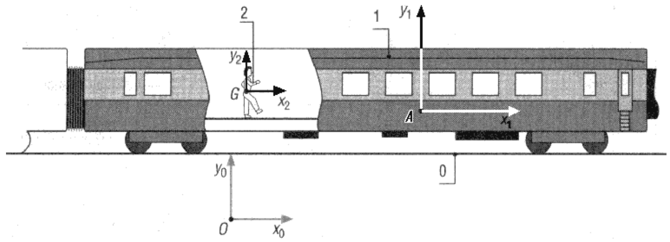
$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

IV.3.2 Composition des vecteurs vitesse

La composition des vecteurs vitesse s'écrit :

Du fait de l'équivalence solide-repère, on écrira plus souvent :

Cette composition des vecteurs est facilement compréhensible sur l'exemple du voyageur dans le train :



Soit le voyageur considéré comme le solide (2), le wagon le solide (1) et (0) le sol considéré fixe.

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{G\epsilon 2/0}}}_{\substack{Vitesse\\absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{G\epsilon 2/1}}}_{\substack{Vitesse\\relative}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{G\epsilon 1/0}}}_{\substack{Vitesse\\d'entrainement}}$$

$\overrightarrow{V_{G\epsilon 2/1}}$ est la vitesse du voyageur.
$\overrightarrow{V_{G\epsilon 1/0}}$ est la vitesse du train (avec le voyageur fixe dans le train).

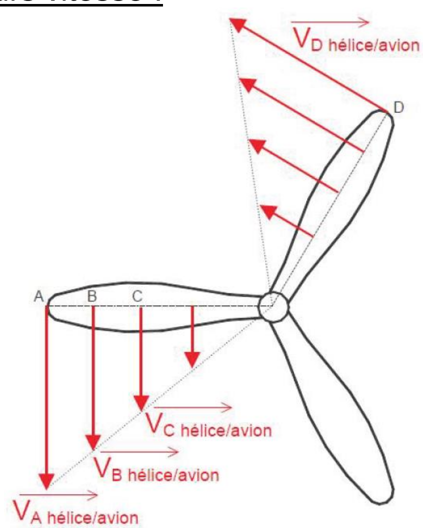
IV.3.3 Champ des vecteurs vitesse

Soit un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R_0. Soit A et B deux points du solide S.
La relation du champ des vecteurs vitesse s'écrit :

Cette relation est parfois appelée, formule du changement de point, ou formule de Varignon.

L'ensemble des vecteurs vitesse tracés sur une pièce s'appelle le champ des vecteurs vitesse.

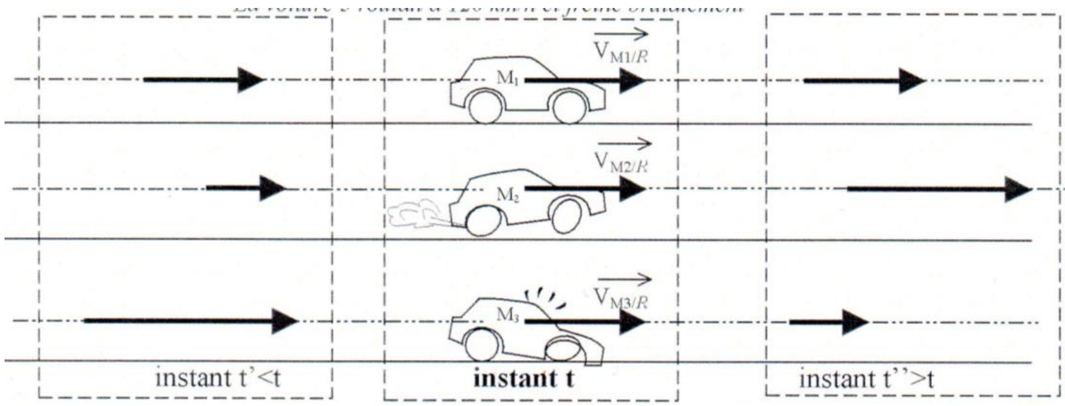
<u>Illustration du champ des vecteurs vitesse :</u>



V ACCELERATION D'UN POINT

Nous allons voir que la vitesse ne suffit pas à expliquer tout ce qui se passe lors d'un mouvement. L'étude de la variation du vecteur vitesse en norme comme en direction devient nécessaire.

Exemple 1 : prenons trois voitures roulant en ligne droite.



À l'instant *t*, les trois voitures ont toutes le même vecteur vitesse (direction, sens et norme).

Sauf que :

- la voiture 1 roule à vitesse constante (50 km/h),
- la voiture 2 vient de démarrer et sa vitesse augmente,
- la voiture 3 qui roulait 110 km/h freine brusquement.

Constatation :

- à l'instant *t*, les passagers des 3 voitures n'ont pas la même sensation malgré un vecteur vitesse identique.

D'où vient la différence ?

- voiture 1 : la norme de la vitesse est constante,
- voiture 2 : la norme de la vitesse augmente,
- voiture 3 : la norme de la vitesse diminue.

Les efforts changent lorsque la norme du vecteur vitesse varie. Ce phénomène est appelé accélération.

Exemple 2 : prenons deux voitures roulant 50 km/h.

À l'instant *t*, les passagers des 2 voitures n'ont pas la même sensation malgré un vecteur vitesse identique.

Les efforts changent lorsque la direction du vecteur vitesse varie. Ce phénomène est appelé accélération.
<u>Conclusion</u> : il faut étudier la variation du vecteur vitesse.

V.1 Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point $M \in S$ par rapport au repère $\Re$, à l'instant *t*, est la dérivée par rapport au temps, de $\overrightarrow{V_{M\in S/R}}$ à l'instant *t*. C'est-à-dire :

$$\vec{a}_{M\,avion/Ro} = \frac{d\overrightarrow{V_{M\,avion/Ro}}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}$$

<u>Unité d'accélération</u> : l'accélération étant le rapport d'une vitesse par un temps, l'unité légale d'accélération est le **mètre par seconde au carré** (m/s^2).

V.2 Expression analytique du vecteur accélération

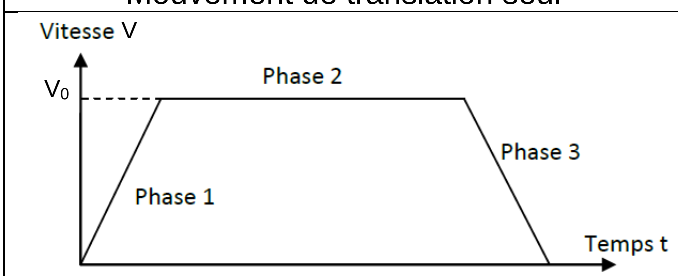
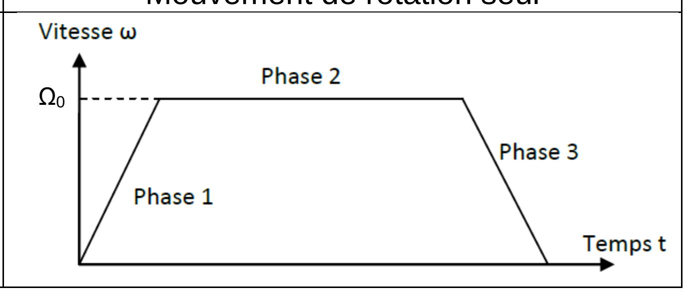
V.2.1 En coordonnées cartésiennes pour un mouvement de translation

Nous avons vu que : $\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{x} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{y} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{z}$ avec $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ indépendant du temps.

Donc les composantes algébriques du vecteur accélération $\overrightarrow{A_{M\in S/R}}$ sont les fonctions dérivées secondes (dérivée de la dérivée) par rapport au temps des composantes algébriques du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

VI MOUVEMENTS PARTICULIERS

Parfois, les mouvements des solides sont des mouvements simples (translation seule ou rotation seule), et l'on peut représenter l'évolution de leur vitesse dans le temps par la figure ci-dessous. On parle alors de cycle de vitesse en trapèze.

Mouvement de translation seul	Mouvement de rotation seul
	

Pour chaque mouvement dans le cycle de vitesse en trapèze, on peut distinguer 3 phases :

- Phase 1 : La vitesse (linéaire ou angulaire) augmente linéairement avec le temps ;
- Phase 2 : La vitesse (linéaire ou angulaire) est constante dans le temps ;
- Phase 3 : La vitesse (linéaire ou angulaire) diminue linéairement dans le temps.

Ces 3 phases peuvent s'étudier simplement en les distinguant à partir de la valeur de l'accélération (linéaire ou angulaire).

VI.1 Mouvements de translation rectiligne

VI.1.1 Mouvements de translation rectiligne uniforme MTRU (phase 2)

On appelle Mouvement de Translation Rectiligne Uniforme le mouvement d'un solide en translation rectiligne dont **la vitesse de translation est constante**.
Dès lors, les équations de mouvement sont :

$$\boxed{\begin{array}{c} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 \textbf{ = Constante} \\ x(t) = v_0.(t - t_0) + x_0 \end{array}}$$

VI.1.2 Mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré MTRUA (Phases 1 et 3)

On appelle Mouvement de Translation Rectiligne Uniformément Accéléré le mouvement d'un solide en translation rectiligne dont **l'accélération linéaire est constante**.
Dès lors, les équations de mouvement sont :

$$\boxed{\begin{array}{c} a(t) = a = \textbf{Constante} \\ v(t) = a.(t - t_0) + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2}.a.(t - t_0)^2 + v_0.(t - t_0) + x_0 \end{array}}$$

avec :

a : accélération linéaire du solide	UNITE : $[m.s^{-2}]$
v_0 : vitesse linéaire initiale du solide	UNITE : $[m.s^{-1}]$
x_0 : position linéaire initiale du solide	UNITE : [m]
t_0 : instant initial	UNITE : [s]

Remarques :
- L'accélération linéaire *a* peut être positive (phase d'accélération) ou négative (phase de décélération).
- Le même raisonnement peut se faire dans le cas d'une vitesse de rotation.

VII MODÉLISATION DES MECANISMES

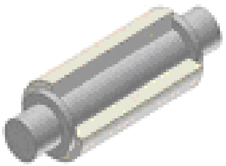
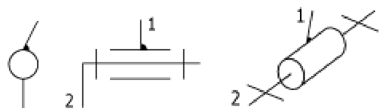
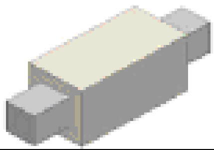
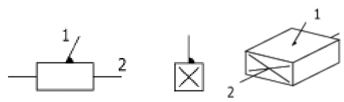
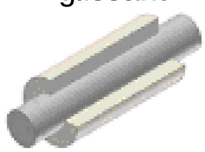
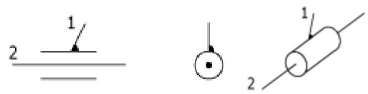
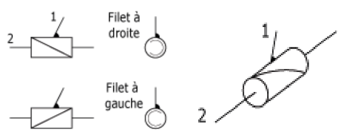
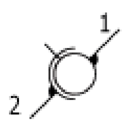
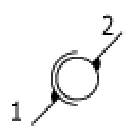
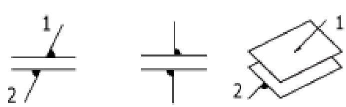
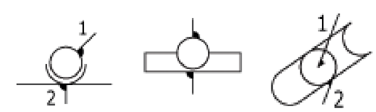
VII.1 Outils torseur

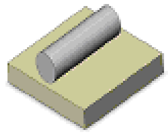
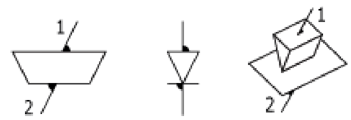
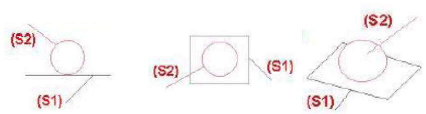
Nous avons vu jusqu'à présent qu'un solide S (ou repère) en un point A par rapport à un repère possède un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et un vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$. Le torseur cinématique permet de regrouper ces 2 vecteurs dans un « outil » appelé **torseur**, noté

$$\{\mathcal{V}_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est appelé résultante du torseur cinématique, et le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ est appelé le moment du torseur cinématique.

VII.1.1 Tableau des liaisons normalisées

Nom de la liaison	Schématisation	Degré de liberté	Caractéristiques géométrique	Torseur
Liaison pivot 		1R	1 point 1 axe	
Liaison glissière 		1T	1 direction	
Liaison pivot glissant 		1R 1T	1 point 1 axe	
Liaison hélicoïdale 		1R+T	1 point 1 axe	
Liaison sphérique à doigt 		2R	1 point 1 direction du doigt	
Liaison rotule 		3R	1 point	
Liaison appui plan 		1R 2T	1 normale	
Liaison linéaire annulaire 		3R 1T	1 point 1 axe	

Liaison linéaire rectiligne 		2R 2T	1 point 1 normale 1 direction	
Liaison ponctuelle 		3R 2T	1 point 1 normale	

VIII CAS DES MOUVEMENTS PLAN SUR PLAN

VIII.1 Définition d'un mouvement plan sur plan

Soit un solide S associé au repère $\Re(\vec{x},\vec{y},\vec{z}=\overrightarrow{z_0})$,en mouvement par rapport au repère $\Re_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. Si le plan P $(O,\vec{x},\vec{y})$, lié à S reste constamment confondu avec le plan P_0 $(O_0\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ lié à R_0, alors le mouvement de S par rapport à R est qualifié de mouvement plan sur plan.

VIII.1.1 Propriétés

La définition précédente implique les 2 conséquences suivantes :

- Les vecteurs vitesse de tous points de S en mouvement par rapport au repère R_0 restent parallèles au plan P_0 (ou P). C'est-à-dire :
$$\forall M \in S, \overrightarrow{V_{M\in S/0}}.\vec{z}=0$$
- Le vecteur taux de rotation de S par rapport à R_0 a une seule composante portée par l'axe $\vec{z}$. C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/0}} = {}_{\Re_0}\left|\begin{matrix}0\\0\\\Omega_z\end{matrix}\right.$$

Par conséquent, les torseurs cinématiques, dans le cas de mouvements plan sur plan de normale $\vec{z}$ se simplifient grandement et s'écrivent :

$$\{\mathcal{V}_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & V_x\\0 & V_y\\\Omega_z & 0\end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

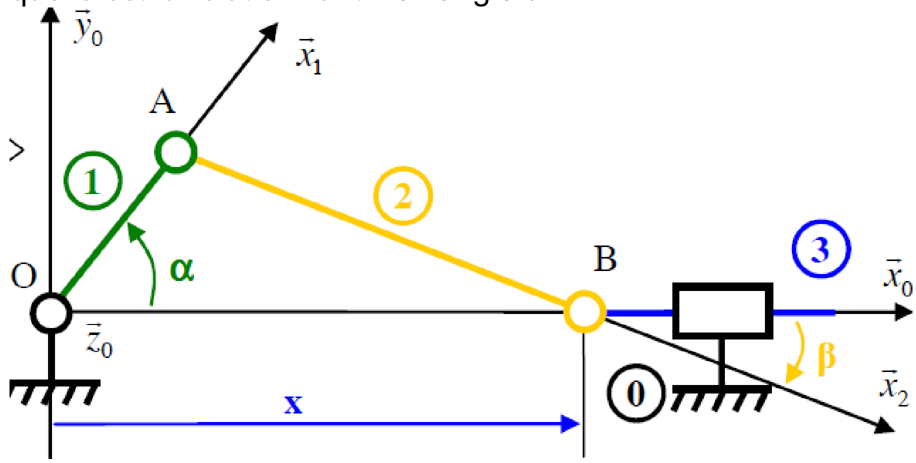
VIII.2 Loi d'entrée-sortie d'un mécanisme

VIII.2.1 Objectif

On appelle loi d'entrée sortie d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position de la pièce d'entrée (en général imposé par un actionneur) et ceux de la pièce de sortie (sur laquelle on veut déterminer les effets du mouvement imposé en entrée) ou de leurs dérivées.

Exemple : Comment évolue la distance *x* en fonction de l'angle *α* ?

Autrement dit, quelle est la relation liant x à l'angle α ?

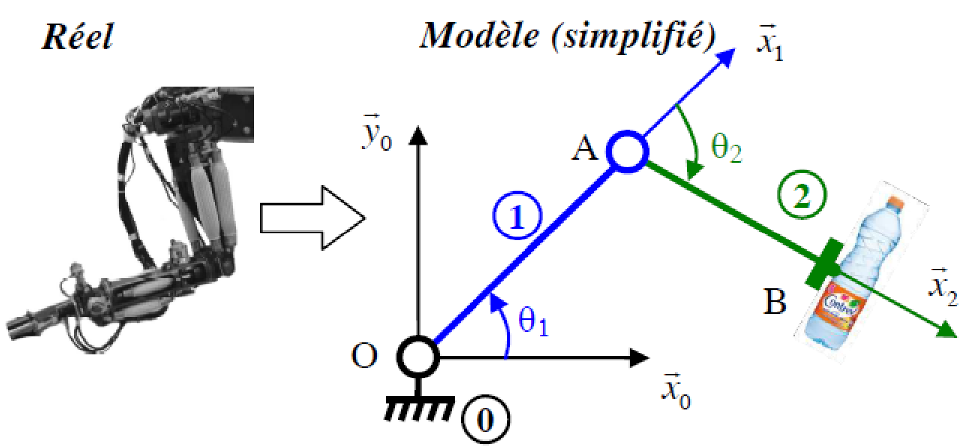


VIII.2.2 Fermeture géométrique

La manière dont on obtient cette loi d'entrée-sortie dépend de la configuration de la chaine cinématique. On distingue les chaînes cinématiques ouvertes et les chaînes cinématiques fermées. Cependant, dans tous les cas, il sera nécessaire d'écrire la fermeture géométrique.

Cas d'une chaîne cinématique ouverte :

Pour ce type de système, on s'intéresse donc généralement à l'effecteur en bout de chaine cinématique, c'est-à-dire l'effecteur qui peut-être une pince, une caméra, une pompe de peinture, …



On considère un modèle plan simple dans lequel la pince du robot est animée par seulement deux mouvements de rotation de paramètres θ_1 et θ_2. Le point B de la pince en bout de chaine a pour coordonnées x_B et y_B dans la base$(O_0\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. On note L_1 la longueur du bras 1, et L_2 la longueur du bras 2.
La loi d'entrée-sortie d'une chaîne cinématique ouverte s'obtient en écrivant la position du point B (x_B,y_B) dans le repère $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$. C'est-à-dire :

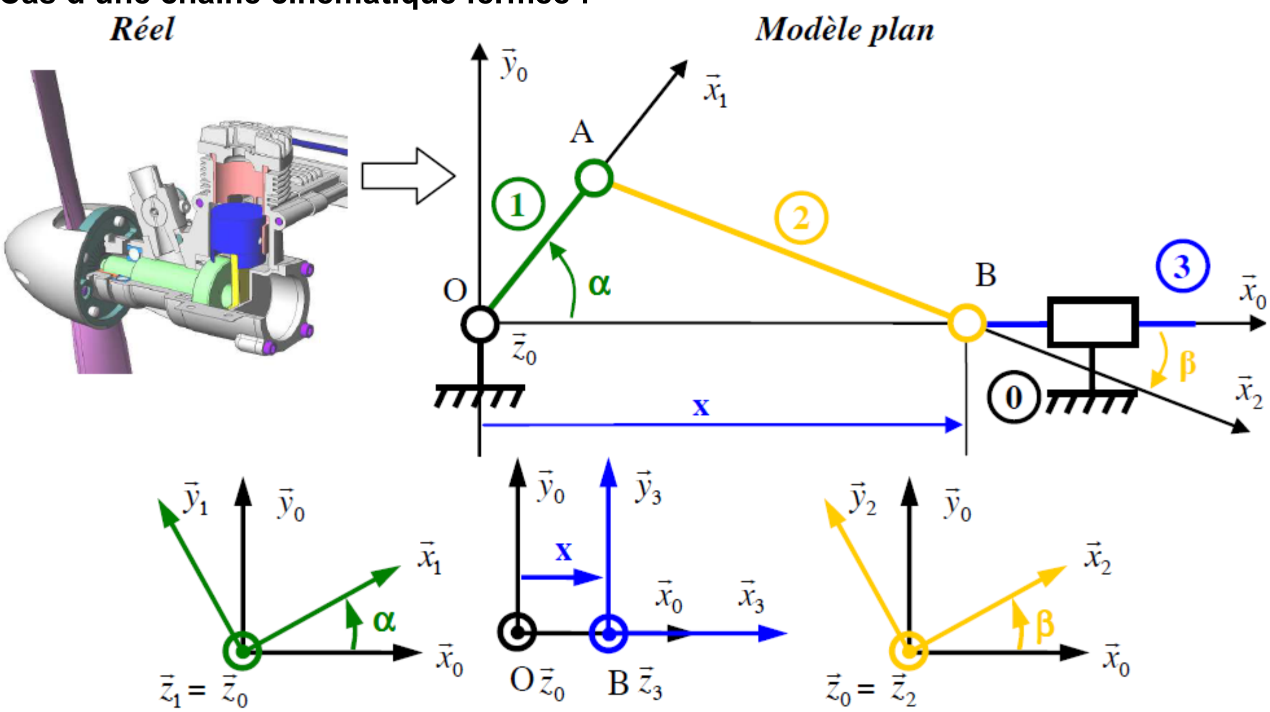
$$\overrightarrow{OB} = x_B\overrightarrow{x_0} + y_B\overrightarrow{y_0}$$

Exprimer x_B et y_B en fonction des paramètres de longueurs et des angles.

En écrivant la relation de Chasles $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ après projection dans le repère R_0 on arrive à déterminer le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L.\cos\theta_1 + L.\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L.\sin\theta_1 + L.\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

Cas d'une chaîne cinématique fermée :



Le paramètre d'entrée est α, il traduit la rotation de la manivelle 1 par rapport à 0 autour de l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. Le paramètre de sortie est x, il traduit la translation du piston 3 par rapport à 0 suivant l'axe $(O,\overrightarrow{x_0})$. Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle 2 par rapport à 0 autour de l'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$. On cherche donc la relation liant la distance x à l'angle α.

On note L_1 la longueur du bras 1, et L_2 la longueur du bras 2.

La fermeture géométrique consiste à écrire que le vecteur $\overrightarrow{OO}$ est nul, et par la relation de Chasles, on obtient :

On écrit la fermeture géométrique $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

$$L_1.\overrightarrow{x_1} + L_2.\overrightarrow{x_2} - x.\overrightarrow{x_0} = \vec{0}\,.$$

En déduire la relation entre x et *α.*

En projection sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$

on obtient deux équations scalaires : $\begin{cases} L_1.\cos\alpha + L_2.\cos\beta - x = 0 \\ L_1.\sin\alpha + L_2.\sin\beta = 0 \end{cases}$

Afin d'obtenir la loi entrée/sortie on élimine le paramètre β en élevant au carré chacune des relations et en les additionnant.

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{x - L_1.\cos\alpha}{L_2} = 0 \\ \sin\beta = -\dfrac{L_1.\sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \textit{et } \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$\rightarrow \left(\frac{x - L_1.\cos\alpha}{L_2}\right)^2 + \left(-\frac{L_1.\sin\alpha}{L_2}\right)^2 = 1 \rightarrow (x - L_1.\cos\alpha)^2 = L_2{}^2 - (L_1.\sin\alpha)^2$$

Soit la loi d'entrée sortie : $\boxed{x = L_1.\cos\alpha + \sqrt{L_2{}^2 - (L_1.\sin\alpha)^2}}$

À l'aide d'un tableur, il est possible de tracer l'évolution de la distance *x* en fonction de l'angle *α*. Dans le cas où L_1 = 0.2 m et L_2 = 0.5 m, on obtient :