Les fonctions logiques

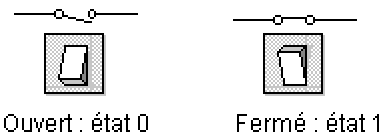
L'algèbre de BOOLE
Les fonctions OUI, NON, ET, OU
Les fonctions NOR, NAND, OU exclusif

La logique binaire

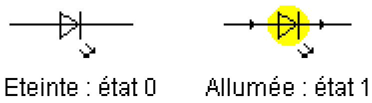
Le binaire permet de représenter facilement l'état logique d'un système technique ou de ses entrées-sorties. C'est une logique à deux états.

Un interrupteur est ouvert ou fermé.
Une lampe est allumée ou éteinte
Une tension est élevée ou faible
Une pression est présente ou pas.

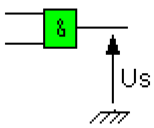
Exemple de l'interrupteur



Exemple de la diode

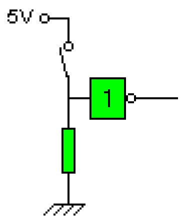


Dans le cas d'un circuit logique électronique, l'état d'une entrée ou d'une sortie est défini par sa tension.



Us est proche de la tension d'alimentation :
Niveau haut (**H**, high), état logique **1**

Us est proche de O volt :
Niveau bas (**L**, Low), état logique **0**



LES FONCTIONS LOGIQUES DE BASE

La fonction OUI

Symbole logique

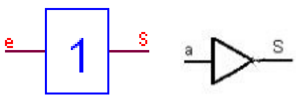


Schéma électrique

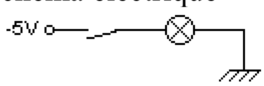


Table de vérité

e	S
0	0
1	1

Équation

$$S = e$$

L'état de la sortie est égal à l'état de l'entrée, cette fonction ne présente par d'intérêt d'un point de vue logique mais peut être utile d'un point de vue technologique.

La fonction NON

Symbole logique

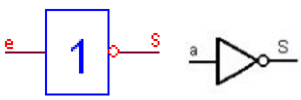


Schéma électrique

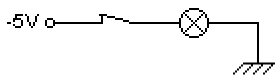


Table de vérité

e	S
0	1
1	0

Équation

$$S = \overline{e}$$

L'état logique de la sortie est le **complément** de celui de l'entrée

La fonction OU

Symbole logique

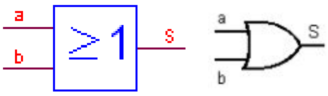


Schéma électrique

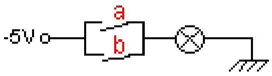


Table de vérité

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Équation

$$S = a + b$$

La sortie est à l'état 1 si au moins une des entrées est à l'état 1.

La fonction ET

Symbole logique

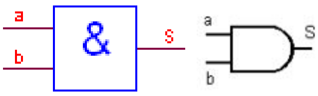


Schéma électrique

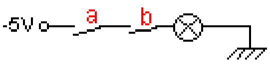


Table de vérité

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Équation

$$S = a . b$$

La sortie est à l'état 1 si les deux entrées sont simultanément à l'état 1.

L'algèbre de Boole : L'algèbre de boole est l'algèbre de la logique binaire
(*Georges BOOLE, philosophe et mathématicien anglais, 1854*)

Propriétés

Commutativité du produit et de la somme logique	**a . b = b . a**	**a + b = b + a**
Associativité du produit et de la somme logique	**(a . b) . c = a . (b . c)**	**(a + b) + c = a + (b + c)**
Distributivité du produit logique par rapport à la somme logique	**a . (b + c) = a b + a c**	
Distributivité de la somme logique par rapport au produit logique	**a + b c = (a + b) . (a + c)**	

Complémentation	$a . \bar{a} = 0$ $\quad a + \bar{a} = 1$	
Idempotence	**a + a = a**	**a . a = a**
Élément neutre	**a + 0 = a**	**a . 1 = a**
Élément absorbant	**a . 0 = 0**	**a + 1 = 1**

Relations utiles

Absorption	**a + ab = a**	**a . (b + a) = a**
	$a + \bar{a} b = a + b$	

Théorèmes de de Morgan

Le complément d'une somme logique est égal au produit du complément de chacun des termes.	$\overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$

Le complément d'un produit logique est égal à la somme du complément de chacun des termes.	$\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

Les opérateurs universels NOR et NAND

L'opérateur NAND (NON ET)

Cet opérateur est un opérateur ET avec la sortie complémentée.

Symbole logique

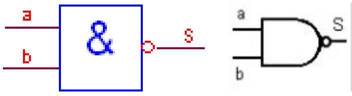


Table de vérité

a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Équation

$$S = \overline{a\,.\,b}$$

L'opérateur NOR (NON OU)

Cet opérateur est un opérateur OU avec la sortie complémentée.

Symbole logique

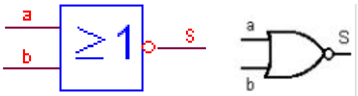


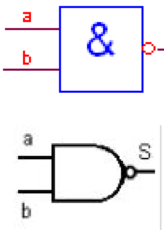
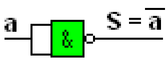
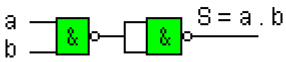
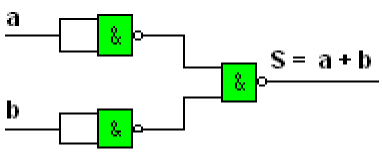
Table de vérité

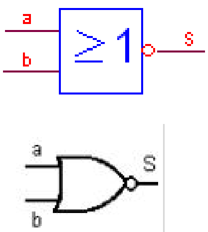
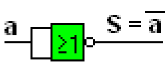
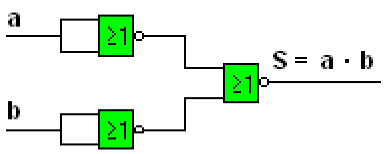
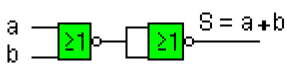
a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Équation

$$S = \overline{a + b}$$

Les opérateurs NOR et NAND peuvent remplacer tous les autres.

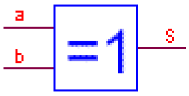
Opérateur NAND	Fonction NON	Fonction ET	Fonction OU
	$S = \overline{a} = \overline{a\,.\,a}$ 	$S = a\,.\,b = \overline{\overline{a\,.\,b}}$ 	$S = a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a}\,.\,\overline{b}}$ 

Opérateur NOR	Fonction NON	Fonction ET	Fonction OU
	$S = \overline{a} = \overline{a + a}$ 	$S = a \cdot b = \overline{\overline{a \cdot b}} = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$ 	$S = a + b = \overline{\overline{a + b}}$ 

L'opérateur OU exclusif XOR

La sortie est à l'état 1 si **une et une seule** des entrée est à 1

Symbole logique



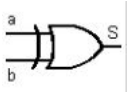


Table de vérité

a	b	S
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Équation

$S = \bar{a}.b + a\bar{b}$

On peut écrire

$S = a \oplus b$

Le complément de la fonction OU exclusif est la fonction identité (a = b) $S = \bar{a}.\bar{b} + a.b$