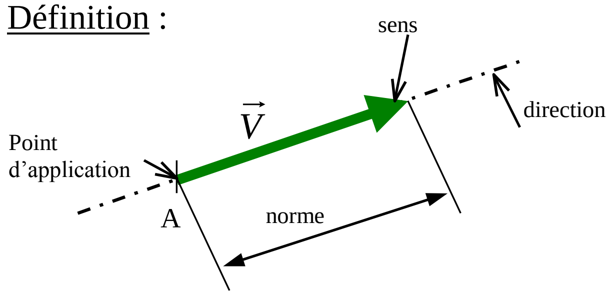
Notions de calcul vectoriel :

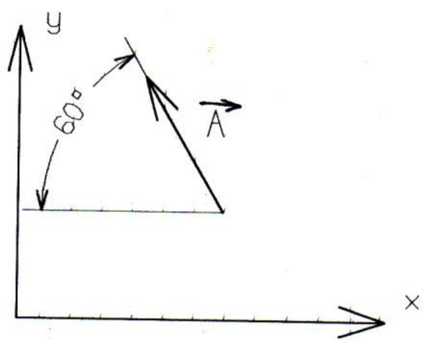
1) Vecteurs :

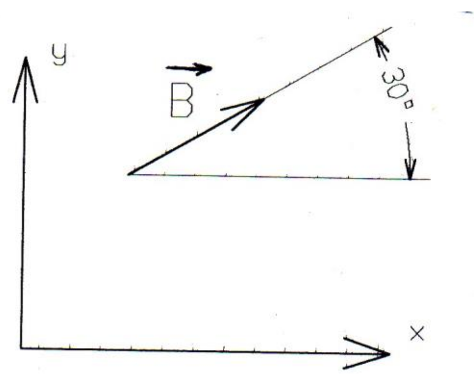
a) Définition :



Un vecteur est défini par :
- -point d'application (origine),
- -sens,
- -intensité (module),
- -direction (support).

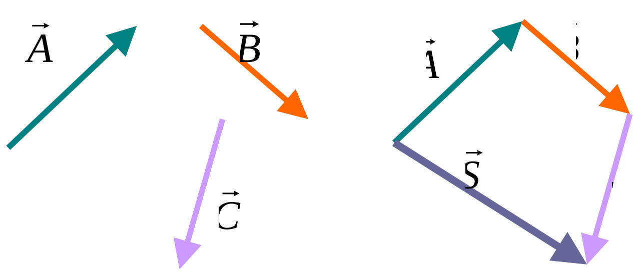
b) Expression dans un repère Oxy.





2) Addition vectorielle :

On appelle somme $\vec{S}$ (ou résultante) de vecteurs, le vecteur qui relie l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur.

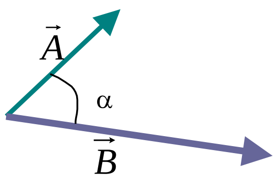


Remarque : l'addition vectorielle est commutative.

3)Produit scalaire :

Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{A}$ par un vecteur $\vec{B}$, que l'on notera $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ (A scalaire B) est défini de la manière suivante :

$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \|\vec{A}\|\,.\,\|\vec{B}\|\,.\cos(\vec{A},\vec{B}) = \|\vec{A}\|\,.\,\|\vec{B}\|\,.\cos\alpha$



Propriété : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si l'un des deux vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont orthogonaux.

Donc si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée de l'espace alors : $\vec{x}\,.\,\vec{y} = \vec{x}\,.\,\vec{z} = \vec{y}\,.\,\vec{z} = 0$

Expression analytique :

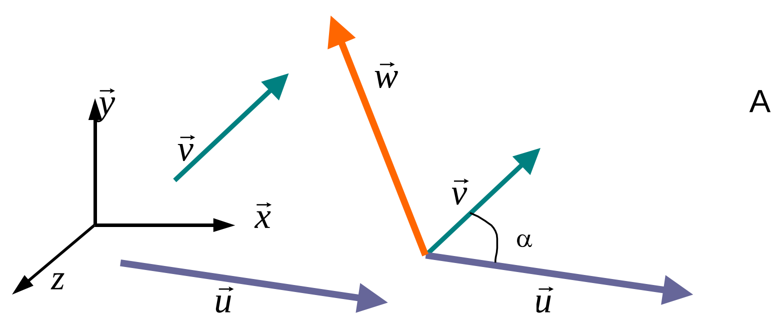
Dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé direct de l'espace, on donne $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{V_1}\,.\,\overrightarrow{V_2} = x_1\,.\,x_2 + y_1\,.\,y_2 + z_1\,.\,z_2$

3) Produit vectoriel :

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ que l'on notera $\vec{u} \times \vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ dont un représentant d'origine est tel que :

- son support est perpendiculaire au plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$
- son sens est tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base directe du plan (règle des trois doigts de la main droite)



- sa norme a pour valeur $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\sin(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\sin\alpha$

Propriétés :

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\alpha = 0$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si l'un des deux vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont colinéaires.

Donc si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base orthonormée de l'espace alors : $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{y} \times \vec{y} = \vec{z} \times \vec{z} = \vec{0}$

- Dans une base orthonormée de l'espace $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on a : $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$; $\vec{y} \times \vec{z} = \vec{x}$; $\vec{z} \times \vec{x} = \vec{y}$
- Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

Expression analytique :

Dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé direct de l'espace, on donne $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$\vec{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$ = $(y_1\,.\,z_2 - z_1\,.\,y_2)\ \vec{x} + (z_1\,.\,x_2 - x_1\,.\,z_2)\ \vec{y} + (x_1\,.\,y_2 - y_1\,.\,x_2)\ \vec{z}$

Méthode pour déterminer le produit vectoriel : $\vec{W} = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2}$